Formation d'une entente dans un appel d'offres au premier prix et risque de détection exogène

Karine Brisset*
*C.R.E.S.E.***, *Université de Franche-Comté*

Introduction

Les ententes anticoncurrentielles entre entreprises soumissionnaires à un appel d'offres public ou privé sont interdites par nature. Ces pratiques qui ont pour objet de faire échec au fonctionnement de la concurrence, permettent à leurs investigateurs d'extraire un surplus coopératif non négligeable aux dépens de l'initiateur de l'appel d'offres. Cependant, la participation à une entente ne se fait pas sans prendre le risque d'être détecté par les autorités publiques et condamné. Les modèles de formation d'ententes développés jusqu'à présent n'ont jamais pris en compte ce risque (cf. Graham et Marshall (1987,90), McAfee et McMillan (1992)). Or ce risque existe et peut dépendre par exemple de la dénonciation de l'existence de l'entente par un individu informé. D'ailleurs, afin de favoriser la dénonciation, les Etats-Unis et le Canada mettent l'accent sur la protection et le recours dont dispose un employé qui dénoncerait la participation de son entreprise à un truquage des offres. Ainsi, aux Etats-Unis, la "Civil Services Reform Act" est l'exemple le plus connu de loi protégeant les dénonciateurs, employés fédéraux, qui communiqueraient des renseignements selon lesquels leur employeur aurait contrevenu à une loi fédérale anti-trust. Il existe, par ailleurs, pour les marchés fédéraux, un système de prime pour récompenser la personne qui dénoncerait toute fraude dans ces marchés. Cette prime représente 30% de la pénalité payée par les fraudeurs lorsqu'ils sont détectés et condamnés.

* L'auteur remercie les deux rapporteurs anonymes de la revue pour leurs remarques sur la version initiale et reste seule responsable d'erreurs.

** C.R.E.S.E, avenue de l'observatoire 25030 Besançon cedex. e-mail : karine.brisset@univ-fcomte.fr Tel : 03.81.66.67.59

D'autre part, afin d'encourager une personne à se dénoncer et à dénoncer les autres participants à un complot, ces pays ont mis en place au cours des années quatre-vingt-dix des programmes d'immunité très efficaces. Par conséquent, les offreurs doivent prendre en compte ce risque dans le calcul de leur espérance de profit lorsqu'ils envisagent de participer à un cartel.

Dans cet article, nous analysons le comportement des offreurs face à un risque de détection du cartel que nous supposons croissant avec le nombre de participants à l'entente, dans le cadre d'une procédure d'appel d'offres au premier prix. Etant donnée la complexité d'un environnement continu, nous nous tournons vers un modèle discret, développé la première fois par McAfee et McMillan (1992) en l'absence de risque. Nous déterminons, dans un premier temps, la réaction optimale du cartel face au risque de détection. Puis, nous définissons la taille d'équilibre stable du cartel en nous appuyant sur le critère introduit par d'Aspremont et al. (1983). L'intérêt majeur de cet article est de montrer que dans certains cas, aucune coalition ne peut se former alors qu'en l'absence de risque, la taille d'équilibre d'une entente est toujours supérieure à trois membres. Enfin, nous retenons une contrainte de rationalité individuelle plus faible que celle retenue par d'Aspremont et al. et montrons que seules les coalitions de grandes tailles sont possibles, lorsque le risque de dénonciation individuelle est grand.

1 Réaction de l'entente au risque de détection

On suppose qu'un objet indivisible est vendu par un appel d'offres au premier prix auquel participent n agents, neutres vis-à-vis du risque, dont les évaluations privées peuvent être égales à $v = 0$ avec une probabilité $p \neq 1$ et à $v = 1$ avec une probabilité $(1 - p)$. Le prix de réserve est fixé de façon exogène et peut être tel que $1 > r > 0$. Nous supposons la présence d'une entente S composée de k agents et nous considérons que les $(n - k)$ agents externes sont informés de l'existence de cette entente.

En participant à l'entente, un agent court le risque d'être dénoncé par toute personne externe à l'appel d'offres mais informée de l'existence de l'entente. Cette hypothèse peut être justifiée par le fait que l'on accorde une prime à toute personne qui dénoncerait un offreur en apportant son témoignage et les preuves d'une entente. Dans la mesure où cette personne peut rester anonyme, les risques de représailles sont faibles. Par exemple, un employé peut très bien dénoncer son employeur pour participation illégale à un complot et apporter les documents prouvant ses dires. Cela est d'autant plus vrai lorsque cet employé n'a plus rien à perdre. En France, un ingénieur de chez Bouygues, qui venait d'être licencié, avait par exemple dénoncé l'existence d'un logiciel « drapo » chargé de gérer un processus d'entente entre Bouygues et d'autres compagnies. Dans ce modèle, on considère que participer à une entente fait courir à chaque agent le risque d'être dénoncé avec une probabilité β, par une personne autre que les offreurs, l'entente étant supposée pouvoir être détectée dès qu'un offreur est dénoncé. Si l'entente est détectée, le cartel perd tous ses profits.

1.1 Fonctionnement de l'entente

Préalablement à l'appel d'offres officiel, l'entente désigne son représentant par un mécanisme interne qui permet de sélectionner n'importe quel offreur avec une valeur de réservation $v = 1$ comme représentant, le cartel ne participant à l'appel d'offres que si au moins l'un de ses membres a une évaluation $v = 1$. Si b est l'offre soumise par le cartel dans l'appel d'offres, chaque membre, dont la valeur de réservation est 1, reçoit une part égale du profit, $(1-b)$. Les offreurs dont l'évaluation est nulle, ne reçoivent rien dans la mesure où ils ne participent pas à l'accroissement du profit coopératif.

Ce mécanisme est incitatif. Il est en effet évident qu'un offreur dont l'évaluation est 1 n'a jamais intérêt à se comporter comme si celle-ci était nulle. Lorsqu'il annonce 0, son profit coopératif est nul alors que s'il annonce 1, son profit est positif. De la même façon, on peut montrer qu'un offreur dont l'évaluation est nulle, n'a pas intérêt à annoncer $\hat{v} = 1$. En effet, supposons que le nombre d'offreurs qui annonce $v = 1$ est s et que l'entente est totale[1]. Deux cas sont alors possibles.

- Si l'offreur n'est pas sélectionné comme représentant, événement qui se produit avec la probabilité $1 - \frac{1}{s}$, il reçoit un transfert de $\frac{1-b}{s}$.
- S'il est sélectionné comme représentant (probabilité $\frac{1}{s}$), il doit verser aux autres membres un transfert global de $\frac{(s-1)(1-b)}{s}$ et verser b au vendeur. Comparons son profit moyen s'il annonce $\hat{v} = 1$ au profit nul obtenu s'il annonce $v = 0$:

$$\pi(\hat{v} = 1) = \left(1 - \frac{1}{s}\right)\left(\frac{1-b}{s}\right) + \frac{1}{s}\left(-\frac{(s-1)(1-b)}{s} + (0-b)\right) = \frac{-b}{s} < 0$$

Cet offreur a donc intérêt à annoncer la vérité.

1.2 Comportement d'offre des agents

Le représentant de l'entente définit l'offre à soumettre dans l'appel d'offres afin de maximiser son espérance de profit compte tenu des offreurs externes et du risque d'être détecté. L'entente n'étant pas détectée si aucun de ses membres n'est dénoncé, la probabilité qu'une entente de $k \geqslant 2$ membres ne soit pas détectée est donc $(1-\beta)^k$. Le risque de détection de l'entente $1-(1-\beta)^k$ est donc croissant en k.

Il est bien connu que dans cette situation de jeu discret, les stratégies d'offre du représentant de l'entente et des offreurs externes sont des

[1] Le même raisonnement peut être appliqué lorsque l'entente est partielle.

stratégies mixtes définies respectivement selon les fonctions de répartition continues F et G.

Les offreurs externes et le représentant du cartel adoptant des stratégies mixtes, à l'équilibre, le profit *interim* de l'entente lorsqu'au moins l'un de ses membres a une évaluation $v = 1$ et que son représentant soumet une offre $b \geqslant r$, est défini par :

$$\pi_c = (1-\beta)^k(1-b)\Pr(b_j < b; \forall j \in N/S)$$

Or,

$$\begin{aligned}\Pr(b_j < b/j \in N/S) &= \Pr(b_j < b/v_j = 0)\Pr(v_j = 0) + \Pr(b_j < b/v_j = 1)\Pr(v_j = 1) \\ &= 1.p + G(b)(1-p)\end{aligned}$$

Compte tenu de l'indépendance des évaluations des offreurs, on a alors :

$$\pi_c = (1-\beta)^k(1-b)\left[(1-p)G(b)+p\right]^{n-k} \tag{1}$$

De même, le profit *interim* d'un offreur externe avec une évaluation est $v = 1$:

$$\pi_{nc} = (1-b)\underbrace{\lfloor((1-p)G(b)+p)^{n-k-1}(p^k+(1-p^k)F(b))\rfloor}_{(3)} \tag{2}$$

Le premier terme de (3) représente la probabilité que les $(n-k-1)$ autres offreurs externes soumettent une offre inférieure à b. Le deuxième terme représente la probabilité que le cartel soumette une offre inférieure à b soit parce qu'aucun membre n'a une évaluation $v = 1$, événement qui se réalise avec la probabilité p^k, soit parce que le représentant du cartel soumet une offre inférieure à b.

Comte tenu que les offreurs adoptent des stratégies mixtes, on peut énoncer le lemme suivant.

Lemme 1 : *À l'équilibre, on doit avoir*

$$\pi_c = (1-\beta)^k\pi_{nc} = (1-\beta)^k(1-r)p^{n-k}$$

Preuve : À l'équilibre, il est bien connu que les deux fonctions de répartition doivent avoir le même support. Soit $\bar{b}$ l'offre maximale commune du représentant du cartel et des offreurs externes.

On a alors $\quad \pi_c = (1-\beta)^k(1-\bar{b}) = (1-\beta)^k\pi_{nc} \quad (4)$

À l'équilibre, on doit avoir $G(r) = 0$. Lorsqu'il y a au moins deux offreurs externes, on ne peut avoir un point masse en r dans la mesure où une légère augmentation de l'offre permettrait une légère augmentation de la probabilité de gagner. Pour la même raison, même s'il n'y a qu'un seul offreur externe et qu'il soumet r avec une probabilité positive ($G(r) > 0$), le représentant peut toujours trouver un ε suffisamment petit tel que la diminution de rente liée à une soumission plus élevée, $r + \varepsilon$, sera plus que compensée par une augmentation de la probabilité de gagner. Ainsi, $G(r) > 0 \Rightarrow F(r) = 0$ et on aurait :

$$\begin{aligned}\pi_c &= (1-\beta)^k(1-r)\left[(1-p)G(r)+p\right] > (1-\beta)^k(1-r)p > (1-\beta)^k(1-r)p^{n-1}\\ &= (1-\beta)^k\pi_{nc}\end{aligned}$$

Or ceci est incompatible avec la condition d'équilibre (4). À l'équilibre, on a donc $G(r) = 0$.

Si $F(r) = G(r) = 0$, alors $\pi_c = (1-r)p^{n-k}(1-\beta)^k$ et $\pi_{nc} = (1-r)p^{n-k-1}p^k = (1-r)p^{n-1}$ et donc $\pi_c > (1-\beta)^k\pi_{nc}$ pour $k > 1$. Or ceci est incompatible avec la condition d'équilibre (4). On ne peut donc avoir simultanément $F(r) = G(r) = 0$. Comme $G(r) = 0$, on a $F(r) > 0$ et $\pi_c = (1-\beta)^k\pi_{nc} = (1-\beta)^k(1-r)p^{n-k}$. □

Du lemme précédent et de (1) et (2), on déduit la proposition 2.

Proposition 2 : *Les offres stratégiques d'un offreur externe et du représentant de l'entente sont distribuées selon les fonctions de répartition respectives G et F définies par :*

$$G(b) = \left[\left(\frac{1-r}{1-b}\right)^{\frac{1}{n-k}} - 1\right]\frac{p}{1-p} \quad \textit{pour } b \in]r, \bar{b}[$$

$$F(b) = \frac{p\left(\frac{1-r}{1-b}\right)^{\frac{1}{n-k}} - p^k}{1-p^k} \quad \textit{pour } b \in [r, \bar{b}]$$

avec $\bar{b} = 1 - (1-r)p^{n-k}$

Preuve : $F(b)$ et $G(b)$ s'obtiennent en résolvant le système suivant :

$$\begin{cases}\pi_c = (1-\beta)^k(1-b)\left[(1-p)G(b)+p\right]^{n-k} = (1-\beta)^k(1-r)p^{n-k} = (1-\beta)^k\pi_{nc}\\ \pi_{nc} = (1-b)\left[(1-p)G(b)+p\right]^{n-k-1}\left[p^k + (1-p^k)G_c(b)\right]^{n-k} = (1-r)p^{n-k}\end{cases}$$

avec $\bar{b}$ tel que $G(\bar{b}) = F(\bar{b}) = 1$. □

D'après la proposition 2, le comportement d'offre du représentant du cartel est indépendant du risque de détection. Ce risque n'est toutefois pas sans influence sur le cartel dans la mesure où il croît au fur et à mesure que la taille du cartel augmente. Nous allons voir comment le cartel réagit à ce risque en considérant successivement deux formations différentes de cartel.

1.3 Réaction de la coalition au risque de détection

Le profit individuel *interim* d'un membre du cartel de taille k, de type $v = 1$, est défini par :

$$\begin{aligned}
\pi_{ic} &= \pi_c \sum_{j=0}^{k-1} C_{k-1}^{j} \frac{p^{k-1-j}(1-p)^j}{j+1} \\
&= \pi_c \frac{1}{k(1-p)} \sum_{j=0}^{k-1} C_k^{j+1} p^{k-1-j}(1-p)^{j+1} \\
&= \pi_c \frac{1}{k(1-p)} \left[\sum_{j=0}^{k-1} C_k^s p^{k-s}(1-p)^s - p^k \right] \\
&= \pi_c \frac{1}{k(1-p)} (1-p^k)
\end{aligned}$$

Cet offreur ne connaissant pas les évaluations des $(k-1)$ autres membres considère que le nombre de membres ayant une évaluation égale à 1 est une variable aléatoire distribuée selon une loi binomiale de paramètre $(k-1; 1-p)$.

Lorsque le risque de détection est nul, ce profit s'écrit

$$\pi_{ic} = (1-r)p^{n-k} \frac{1-p^k}{k(1-p)}$$

Comme le profit *interim* d'un offreur de type $v = 0$ est nul, le profit *ex ante* coopératif d'un offreur, lorsque le risque de détection est nul, est défini par :

$$E_{ic}(k) = (1-p)\pi_{ic}(k) + p.0 = \pi_c \frac{(1-p^k)}{k} = (1-r)p^{n-k} \frac{(1-p^k)}{k}$$

Le profit *ex ante* d'un offreur externe, lorsque la taille du cartel est k, est défini par :

$$E_{nc}(k) = (1-p)\pi_{nc}(k) + p.0 = (1-p)(1-r)p^{n-k}$$

où $(1-p)$ est la probabilité qu'un offreur ait une évaluation égale à 1.

Lorsque $k = 1$, il n'y a pas d'entente et le profit non-coopératif *ex ante* d'un offreur est donné par :

$$E_{nc}(1) = (1-p)\pi_{nc}(1) = (1-p)(1-r)p^{n-1} = E_{ic}(1)$$

Un cartel d'offreurs accepte de s'accroître tant que le profit individuel *ex ante* accordé à chaque membre est croissant avec la taille de l'entente.

Lorsque le risque de détection est nul, nous montrons que ce profit individuel est toujours croissant. En revanche, lorsqu'il existe un risque de détection du cartel croissant avec le nombre de participants, la croissance du profit en fonction de la taille n'est pas toujours vérifiée. Dans certains cas, l'entente ne peut alors pas se former. Pour cela, nous considérons le jeu de formation d'entente suivant : on demande simultanément à chaque agent s'il désire devenir membre de l'entente. Ceux qui sont d'accord deviennent membres, ceux qui refusent sont les offreurs externes.

Dans ces conditions, un cartel de taille k est stable au sens de d'Aspremont et al. (1983) s'il vérifie une propriété de stabilité interne garantissant qu'aucun offreur qui coopère n'a intérêt à devenir indépendant :

$$E_{ic}(k) \geqslant E_{nc}(k-1) \tag{5}$$

et une propriété de stabilité externe garantissant qu'aucun offreur externe n'a intérêt à joindre le cartel :

$$E_{nc}(k) \geqslant E_{ic}(k+1) \tag{6}$$

On peut alors énoncer la proposition suivante.

Proposition 3 : *$E_{ic}(k)$ est croissant en k.*

Preuve : Montrer que $E_{ic}(k+1) > E_{ic}(k)$ est équivalent à montrer que la fonction $f(p) = k + p^{k+1} - (k+1)p$ est positive pour $p \in]0,1[$.
Étant donné que $f(1) = 0$ et $f'(p) = (k+1)p^k - (k+1) < 0$ pour $p \in]0,1[$, on déduit que $f(p) > 0$ $\forall p \in]0,1[$. □

Lorsque le risque de détection est non nul, le profit individuel *ex ante* d'un membre du cartel devient :

$$E_{ic}(k) = (1-\beta)^k(1-r)p^{n-k}\frac{(1-p^k)}{k} \text{ pour } k \geqslant 2$$

Dans ce cas, la valeur de β conditionne la croissance du profit en k. Différents cas sont alors possibles et sont présentés dans la proposition 4.

Proposition 4 :

- *si $(1-\beta) < \sqrt{\frac{2p}{p+1}}$, l'entente ne peut se former.*
- *si $(1-\beta) \geqslant \sqrt{\frac{2p}{p+1}}$, le profit individuel ex ante est croissant avec la taille de l'entente et l'entente a toujours intérêt à accepter de nouveaux membres.*

Preuve : On a $E_{ic}(2) \geqslant E_{ic}(1)$ si et seulement si $(1-\beta)^2 \geqslant \frac{2p}{p+1}$, soit $(1-\beta) \geqslant \sqrt{\frac{2p}{p+1}}$. Lorsque cette condition est satisfaite, le cartel accepte de s'accroître tant que $E_{ic}(k+1) > E_{ic}(k)$ pour $k \geqslant 2$, c'est-à-dire tant que :

$$(1-\beta) > \frac{k+1}{k}p\frac{(1-p^k)}{(1-p^{k+1})} \tag{7}$$

On remarque qu'en posant $k = 1$ dans (7), on a $(1-\beta) > \frac{2p}{(1+p)}$, ce qui est vérifié car $(1-\beta) \geqslant \sqrt{\frac{2p}{p+1}} > \frac{2p}{p+1}$. Comme $\frac{k+1}{k}p\frac{(1-p^k)}{(1-p^{k+1})}$ est une fonction décroissante de k (voir démonstration en annexe A), l'inégalité (7) est toujours vérifiée $\forall k$, lorsque $(1-\beta) > \sqrt{\frac{2p}{p+1}}$. Il est donc toujours profitable pour une entente d'accepter un nouveau membre.

En revanche, si $(1-\beta) < \sqrt{\frac{2p}{p+1}}$, on a $E_{ic}(2) > E_{ic}(1)$ et la coalition ne peut se former. □

Ainsi, lorsque le risque de dénonciation individuelle exogène est considéré par chaque agent comme trop important, aucune coalition ne peut être amorcée. Dans le cas contraire, la taille d'équilibre va être déterminée par les conditions de stabilité de l'entente.

2 Taille d'équilibre stable du cartel

À partir de la définition d'un cartel stable au sens de d'Aspremont *et al.* (1983), nous pouvons énoncer la proposition suivante.

Proposition 5 : *Lorsque $(1-\beta) > \sqrt{\frac{2p}{p+1}}$, la taille d'équilibre stable du cartel k^* est unique et est telle que :*

$$n \geqslant k^* \geqslant 2 \text{ et}$$
$$(1-\beta)^{k^*}\frac{1-p^{k^*}}{k^*} \geqslant (1-p)p \geqslant (1-\beta)^{k^*+1}\frac{1-p^{k^*+1}}{k^*+1} \tag{8}$$

Preuve : L'inégalité (8) découle des conditions de stabilité (5) et (6) définies ci-dessus.

Comme $(1-\beta) > \sqrt{\frac{2p}{p+1}}$, on a $E_{ic}(2) \geqslant E_{ic}(1)$ et donc $k^* \geqslant 2$.

Enfin, $(1-\beta)^k\frac{1-p^k}{k}$ étant décroissant en k (voir démonstration en annexe B), la taille d'équilibre k^* est unique. □

On peut remarquer que si $(1-\beta)^n\frac{1-p^n}{n} \geqslant (1-p)p$, l'entente totale est stable.

En l'absence de risque, McAfee et Mc Millan (1992) montrent que la taille d'équilibre stable de l'entente k_1^* est définie par :

$$\frac{1-p^{k_1^*}}{k_1^*} \geqslant (1-p)p \geqslant \frac{1-p^{k_1^*+1}}{k_1^*+1}$$

Comme $(1-p)^3 = 1 - 3p(1-p) - p^3 \geqslant 0$, on a $\frac{1-p^3}{3} \geqslant (1-p)p$ et donc $k_1^* \geqslant 3$.

Comparons maintenant k^* et k_1^*.

Corollaire 6 : *En présence d'un risque de détection de l'entente croissant avec le nombre de participants, la taille d'équilibre stable de l'entente k^* est inférieure ou égale à la taille d'équilibre stable de l'entente k_1^* en l'absence de tout risque de détection.*

Preuve : Si $\beta = 0$, la taille d'équilibre stable du cartel est atteinte pour le plus grand $k = k_1^*$ tel que $\frac{1-p^{k_1^*}}{k_1^*} \geqslant (1-p)p$. Lorsque le risque de détection est de type $1-(1-\beta)^k$, la taille d'équilibre stable est atteinte pour le plus grand $k = k^*$ tel que $(1-\beta)^{k^*} \frac{1-p^{k^*}}{k^*} \geqslant (1-p)p$.

Or, on a nécessairement $\frac{1-p^{k^*}}{k^*} \geqslant (1-\beta)^{k^*} \frac{1-p^{k^*}}{k^*} \geqslant (1-p)p$ et $\frac{1-p^k}{k}$ étant une fonction décroissante de k, on déduit que la taille d'équilibre stable k_1^* est telle que $k_1^* \geqslant k^*$. □

3 Illustrations

Supposons que le risque de dénonciation individuelle est estimé à 5% ($\beta = 0,05$). Pour que la coalition ne puisse pas être amorcée, il faudrait que $\sqrt{\frac{2p}{1+p}} > 0,95$, soit $p > 0,9$. Dans le cas contraire, la taille d'équilibre stable de l'entente est déterminée par le plus grand $k = k^*$ tel que :

$$(1-0,05)^{k^*} \frac{1-p^{k^*}}{k^*} \geqslant (1-p)p$$

Ainsi, pour $\beta = 0,05$, le tableau 1 détermine les tailles d'équilibres stables pour différentes valeurs de p. On suppose que $n \geqslant 11$.

Tableau 1

p	k^*	k_1^*
0.1	7	11
0.2	4	5
0.3	3	4
0.4	3	4
0.5	3	3
0.6	2	3
0.7	2	3
0.8	2	3
0.9	1	3
0.95	1	3

Remarque : *Même avec un risque de dénonciation individuelle faible et une probabilité $p = 0.1$ également faible, la taille d'équilibre stable est très inférieure à celle qui aurait prévalu en l'absence de risque.*

Lorsque le risque de détection individuelle est plus grand, la taille d'équilibre stable du cartel est plus petite. Ainsi, pour $\beta = 0.2$, les résultats sont présentés dans le tableau 2.

Tableau 2

p	k^*	k_1^*
0.1	4	11
0.2	3	6
0.3	2	4
0.4	2	4
0.5	1	3
0.6	1	3
0.7	1	3
0.8	1	3

La présence d'un risque de détection croissant avec la taille de l'entente a donc pour effet de diminuer la taille d'équilibre stable du cartel, voire d'empêcher toute formation séquentielle. En l'absence de risque, les résultats montrent qu'il devient plus avantageux de rester en dehors de la coalition lorsque celle-ci a atteint une certaine taille. Lorsque le risque de détection est croissant avec la taille de l'entente, ce phénomène accentue le fait qu'il soit profitable d'être en dehors de l'entente et explique que la taille d'équilibre stable de l'entente soit plus rapidement atteinte.

Nous remarquons que la taille d'équilibre du cartel est indépendante du nombre d'offreurs potentiels participant à l'appel d'offres, bien que $k^* \leqslant n$. Lorsque le nombre d'offreurs est faible, il est donc très vraisemblable qu'une entente totale puisse se former en l'absence de risque. Cela est plus difficile lorsque le risque de détection augmente avec la taille. En revanche, lorsque le marché est très concurrentiel au départ, il est vraisemblable qu'une entente ne comprenne qu'une partie des offreurs.

Ces résultats dépendent cependant du critère de rationalité individuelle retenu. En particulier, notre démarche repose sur la définition de d'Aspremont et al. qui s'appuie sur la contrainte de rationalité individuelle dite forte (de type 2). On compare en effet le profit d'un agent en tant que membre du cartel à celui qu'il aurait en dehors du cartel sachant que celui-ci pourrait subsister sans sa présence. Dans la section suivante, nous analysons le comportement des agents en retenant cette fois ci une contrainte de rationalité individuelle dite faible (de type 1)[2]. Pour cela, on considère un mécanisme de formation d'entente exogène : on propose à k offreurs parmi

[2] Voir par exemple, Vives(1999), p.266.

n de s'entendre si l'un d'entre eux refuse, l'appel d'offres est joué de façon non-coopérative entre l'ensemble des offreurs.

4 Taille d'équilibre *faible* du cartel

Dans cette situation, un offreur accepte d'entrer dans la coalition si et seulement si son profit espéré est supérieur à ce qu'il aurait en l'absence de toute forme d'entente. Nous retenons donc la contrainte minimale à satisfaire pour qu'un agent accepte de participer à une entente de taille k :

$$E_{ic}(k) \geqslant E_{nc}(1) \tag{9}$$

- Lorsque le risque de dénonciation est nul, McAfee et McMillan (1992) ont montré que la coalition totale $k = n$ satisfait (9). En effet, en l'absence d'offreurs externes, la stratégie optimale d'un cartel consiste à soumettre une offre égale au prix de réserve. Dans ce modèle discret, les membres du cartel peuvent alors adopter deux types de schémas de coordination qui donnent la même espérance de gain. Soit un offreur particulier est désigné représentant de l'entente, soumet une offre égale à r et partage son gain de façon égalitaire entre tous les membres, soit tous les membres du cartel soumettent une offre égale au prix de réserve r et le vainqueur (choisi au hasard par le vendeur) partage son gain entre tous les membres. Dans les deux cas, le profit individuel *ex ante* d'un membre du cartel est défini par :
$$E_{ic}(n) = (1-r)\frac{(1-p^n)}{n}$$
Or, étant donné que[3] $\frac{n(1-p)p^{n-1}}{1-p^n} < 1$,

on a $$E_{ic}(n) = (1-r)\frac{(1-p^n)}{n} > (1-p)(1-r)p^{n-1} = E_{ic}(1)$$

- Lorsque $(1-\beta) \geqslant \sqrt{\frac{2p}{1+p}} > \frac{2p}{1+p}$, nous avons montré dans la section précédente que $E_{ic}(k)$ est croissant en k et que $E_{ic}(2) \geqslant E_{nc}(1)$. Par conséquent, si les offreurs retiennent uniquement la contrainte de rationalité (9), ils ont toujours intérêt à entrer dans la coalition, laquelle a toujours intérêt à accepter de nouveaux membres.

En revanche, que se passe-t-il si $(1-\beta) \geqslant \sqrt{\frac{2p}{1+p}}$? Nous avons vu que l'entente qui ne comprend que deux offreurs n'est pas soutenable.

[3] Soit $f(p) = n(1-p)p^{n-1} - (1-p^n)$, on a $f(1) = 0$, et $f'(p) = n(n-1)p^{n-2}(1-p) > 0 \Rightarrow f(p) < 0$, $\forall p \in]0,1[$.

Cependant, la proposition 7 montre qu'il est possible que la coalition puisse se former lorsqu'elle comprend un minimum d'offreurs.

Proposition 7 : *Lorsque la contrainte de rationalité individuelle retenue par les offreurs est de type faible et que* $(1-\beta) \geqslant \sqrt{\frac{2p}{1+p}}$*, une entente entre offreurs pourra se former s'il existe un minimum de participants* $\underline{k}^*$ *tel que* $n \geqslant \underline{k}^* \geqslant \underline{k}$ *et tel que*

$$(1-\beta) \geqslant \left(\frac{\underline{k}^*(1-p)p^{\underline{k}^*-1}}{1-p^{\underline{k}^*}}\right)^{\frac{1}{\underline{k}^*}} \tag{10}$$

où $\underline{k}$ *est la taille minimale à partir de laquelle* $E_{ic}(.)$ *devient croissant en* k.

Preuve : Étant donné que $\frac{k(1-p^{k-1})}{(k-1)(1-p^k)}p$ est une fonction décroissante de k, tant que $(1-\beta) < \frac{k(1-p^{k-1})p}{(k-1)(1-p^k)}$, $E_{ic}(k)$ est décroissant[4] en k. Comme $(1-\beta) \geqslant \sqrt{\frac{2p}{1+p}}$, on a alors $E_{nc}(1) > E_{ic}(2) > E_{ic}(k)$. S'il existe un $\underline{k}$ minimum tel que $(1-\beta) < \frac{\underline{k}(1-p^{\underline{k}-1})p}{(\underline{k}-1)(1-p^{\underline{k}})}$, alors pour tout $k \geqslant \underline{k}$, $E_{ic}(k)$ devient croissant en k. Mais pour qu'une coalition puisse se former, il doit exister un $\underline{k}^*$ minimum, tel que $n \geqslant \underline{k}^* \geqslant \underline{k}$ et tel que $E_{ic}(\underline{k}^*) \geqslant E_{nc}(1)$, ce que traduit l'inégalité (10). □

Corollaire 8 : *lorsque* $\underline{k}^*$ *existe, la grande coalition est stable.*

Preuve : En $\underline{k}^*$, la contrainte de rationalité individuelle (9) est satisfaite. Etant donné que $\underline{k}^* \geqslant \underline{k}$, $E_{ic}(k)$ est croissant $\forall k \geqslant k^*$ et la contrainte de rationalité individuelle est satisfaite en $k = n$. □

Lorsque le risque de dénonciation individuelle β est important, la proposition 7 montre qu'une coalition ne peut se former que lorsque le nombre de participants est suffisamment élevé. Intuitivement, cela s'explique par le fait qu'au-dessus d'une certaine taille, l'effet de l'accroissement du profit individuel coopératif (sans prendre en compte $(1-\beta)^k$) l'emporte sur celui de la diminution de $(1-\beta)^k$ qui résulte d'un accroissement du risque. Ce résultat laisse penser que seules les coalitions de tailles importantes sont soutenables.

Il est également possible que le nombre d'offreurs n participant à l'appel d'offres ne soient pas suffisamment important et que l'on ait $(1-\beta) < \frac{n(1-p^{n-1})p}{(n-1)(1-p^n)}$. Dans ce cas, aucune coalition ne peut se former. Et même si $(1-\beta) \geqslant \frac{n(1-p^{n-1})p}{(n-1)(1-p^n)}$, il se peut que l'inégalité (10) ne soit pas satisfaite en $\underline{k}^* = n$, et dans ces conditions, aucune coalition n'est soutenable. Cela suggère que la formation d'une entente n'est possible que sur des marchés très concurrentiels au départ. Enfin, dans la mesure où $\frac{k}{k-1}p\frac{(1-p^{k-1})}{(1-p^k)}$

[4] Voir l'inégalité (5).

est minoré par[5] p, si $p > (1-\beta)$, alors $\frac{k}{k-1}p\frac{(1-p^{k-1})}{(1-p^k)} \geqslant p > (1-\beta)\ \forall k$, et aucune coalition n'est possible quel que soit le nombre d'offreurs participant à l'appel d'offres.

Pour illustrer ces remarques, nous proposons quelques applications numériques. Nous présentons quelques exemples dans lesquels $(1-\beta) < \sqrt{\frac{2p}{1+p}}$ et nous déterminons pour chacun, les tailles $\underline{k}$ et $\underline{k}^*$.

$$\textbf{Cas 1}: \begin{cases} \beta = 0.2 \\ p = 0.7 \end{cases}$$

Les simulations numériques donnent $\underline{k} = 5$ et $\underline{k}^* = 13$. Cela signifie qu'à partir de offreurs, le profit individuel coopératif *ex ante* devient croissant en k mais il est nécessaire que la coalition comprenne au moins 13 offreurs pour qu'elle soit réalisable. Cela signifie qu'aucune coalition n'est viable dans les marchés où le nombre de participants est inférieur à 13.

$$\textbf{Cas 2}: \begin{cases} \beta = 0.26 \\ p = 0.6 \end{cases}$$

On obtient $\underline{k} = 3$ et $\underline{k}^* = 9$. Même si le profit individuel coopératif devient très vite croissant en k, seule une coalition comprenant au moins 9 membres est possible.

$$\textbf{Cas 3}: \begin{cases} \beta = 0.3 \\ p = 0.71 \end{cases}$$

Dans cette situation, aucune coalition n'est possible dans la mesure où $(1-\beta) < p$.

5 Conclusion

Lorsque le risque de détection est considéré comme nul, la taille d'équilibre stable d'un cartel est toujours supérieure à trois membres, dans le cadre de ce modèle discret. Dans cet article, nous avons montré que la formation d'une entente peut être fortement perturbée lorsque le risque de détection est croissant avec le nombre de participants à l'entente. Si le risque de dénonciation individuelle est grand, aucune coalition ne peut se former de manière séquentielle lorsque le critère de stabilité est celui de d'Aspremont et al.(1983). Si ce risque n'est pas trop important, une entente aura toujours intérêt à accepter de nouveaux entrants, mais la taille d'équilibre stable de l'entente sera inférieure à celle qui aurait prévalu en l'absence de tout risque de détection. En revanche, si la contrainte de rationalité individuelle retenue est de type « faible », seules les coalitions de grandes tailles sont viables

5 Cela provient de la décroissance de $\frac{1-p^k}{k}$ en k.

lorsque le risque de dénonciation individuelle est grand. Dans certains cas, le nombre de participants à l'appel d'offres est insuffisant pour qu'une coalition soit possible.

Cet article a permis d'interpréter l'influence du risque de détection sur le comportement des agents selon le type de formation retenu par un cartel. Nous avons cependant considéré que le dénonciateur était externe à l'appel d'offres. Dans un travail en cours, nous adoptons actuellement une approche différente de la dénonciation en analysant les effets des programmes de clémence mis en œuvre par la communauté européenne à partir de 1996. Ces programmes visent à accorder des réductions d'amende à tout membre d'un cartel qui apporterait les preuves de son existence.

Annexe A

Démonstration de la décroissance de $\frac{k+1}{k}p\frac{1-p^k}{1-p^{k+1}}$ en k

Posons $g(k) = \frac{1-p^k}{k}p^{n-k}$. On a alors $\frac{g(k)}{g(k+1)} = \frac{k+1}{k}p\frac{1-p^k}{1-p^{k+1}}$.

$\frac{g(k)}{g(k+1)}$ est décroissant en k si et seulement si $\frac{g(k)}{g(k+1)} < \frac{g(k-1)}{g(k)}$ $\forall k$.

Soit encore
$$\frac{g^2(k) - g(k+1)g(k-1)}{g(k+1)g(k)} \qquad [0]$$

Or on a

$$g^2(k)-g(k-1)g(k+1) = \frac{p^{2n-2k}}{k^2(k^2-1)}\underbrace{(-p^{2k} + k^2p^{k+1} + k^2p^{k-1} - 2(k^2-1)p^k - 1)}_{h(p)}$$

On a $h(1) = 0$ et

$$h'(p) = p^{k-2}\underbrace{-2kp^{k+1} + k^2(k+1)p^2 - 2(k^2-1)kp + k^2(k-1))}_{i(p)}$$

On a $i(1) = 0$, $i'(p) = -2k(k = 1)p^k + 2k^2(k+1)p - 2(k^2-1)k$, et $i'(1) = 0$, $i''(p) = -2k^2(k+1)(1-p^{k-1})$.

Or $p \in]0,1[$, par conséquent $i''(p) > 0$ et $i'(p)$ est croissant en p. Comme $i'(1) = 0$, on déduit que $i'(p) < 0$. Donc $i(p)$ est décroissant en p. Or $i(1) = 0$, par conséquent $i(p) > 0$. On en déduit que $h'(p) > 0$. $h(p)$ est donc croissant en p et $h(1) = 0$, par conséquent $h(p) > 0$ $\forall p \in]0,1[$. L'inégalité [0] est donc vérifiée $\forall k$.

Annexe B

Démonstration de la décroissance de $(1-\beta)^k \frac{1-p^k}{k}$ en k

$(1-\beta)^k$ est décroissant en k puisque $(1-\beta) \leqslant 1$.

Nous montrons que $\frac{1-p^k}{k}$ est également décroissant en k. Il suffit pour cela de montrer que $\frac{1-p^{k-1}}{k-1} \geqslant \frac{1-p^k}{k}$ $\forall k$. Ceci est équivalent à montrer que la fonction $f(p) = 1 - kp^{k-1} + (k-1)p^k$ est positive $\forall p$.

En $p = 1$, on a $f(1) = 0$. De plus $f'(p) = -k(k-1)p^{k-2}(1-p) < 0$. Par conséquent, $f(p) \geqslant 0$ $\forall p$.

Références

d'Aspremont C., Jacquemin A., Gabszewicz J., Weymark J. (1983), "On the Stability of Collusive Price Leadership", *Canadian Journal of Economics*, 16, 17-25.

Graham D.A and Marshall R.C. (1987), "Collusive Bidder Behavior at Single Object Second Price and English Auctions", *Journal of Political Economy*, December 87, vol. 95, 1217-1239.

Graham D.A and Marshall R.C. and Richard J.F. (1990), "Differential Payments within a Bidder Coalition and the Shapley Value", *American Economic Review*, June 90, 80(3), 493-510.

McAfee R.P. and McMillan J. (1987), "Auctions and Bidding", *Journal of Economic Literature*, June 87, 25, 708-747.

McAfee R.P. and McMillan J. (1992), "Bidding Rings", *American Economic Review*, vol 82 June 92, 579-595

Vives X. (1999), *Oligopoly Pricing*, MIT Press.